



Mathematische Aufgaben in Jahrgangsstufe 11 bewältigen

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die Mathematik in der Oberstufe des Gymnasiums besteht aus Analysis, Stochastik und analytischer Geometrie. In der Jahrgangsstufe 11 werden folgende Themen behandelt:

- Spezielle Eigenschaften von Funktionen (Analysis)
- Gebrochen-rationale Funktionen (Analysis)
- Bedingte Wahrscheinlichkeit (Stochastik)
- Lokales und globales Differenzieren (Analysis)
- Anwendungen der Differentialrechnung (Analysis)

Wir möchten Ihnen mit diesem Dokument eine Hilfe an die Hand geben, mathematische Aufgaben - insbesondere anspruchsvolle Aufgaben - erfolgreich zu bewältigen.

Bei Fragen bitte Ihre Mathematiklehrkraft ansprechen.

Viel Erfolg!

Eure Mathematiklehrkräfte



1 Einteilung und Kennzeichen von Aufgaben

1.1 Mathematische Kompetenzen

Um mathematische Aufgaben in der Oberstufe erfolgreich zu lösen, sind je nach Aufgabenstellung unterschiedliche Kompetenzen von Ihnen verlangt:

K 1 Mathematisch argumentieren

Diese Kompetenz verlangt von Ihnen das Entwickeln und Wiedergeben von mathematischen Argumentationen, Begründungen und Beweisen (rechnerisch, graphisch und schriftlich in ganzen Sätzen). Hierfür müssen Sie verschiedenen Begründungsmuster, wie zum Beispiel Widerlegen durch ein Gegenbeispiel, indirekte Beweise oder Kausalketten anwenden.

K 2 Probleme mathematisch lösen

Bei dieser Kompetenz müssen Sie Problemstellungen (oft mit Sachkontext) erkennen und geeignete Lösungswege mit Hilfe von passend ausgewählten Strategien finden.

K 3 Mathematisch modellieren

Diese Kompetenz umfasst das Anwenden bekannter Modelle und das Konstruieren eigener Modelle, um Realsituationen mit bekannten mathematischen Wissen zu verstehen. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation.

K 4 Mathematische Darstellungen verwenden

Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln.

K 5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten. Sie verlangt von Ihnen das Wissen über geeignete Rechenregeln und -verfahren sowie das Durchführen einfacher und komplexer Rechenverfahren.

K 6 Mathematisch Kommunizieren

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache.



1.2 Anforderungsbereiche

Die Aufgaben lassen sich meist in drei Anforderungsbereiche einteilen:

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang, die Verständnissicherung sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren.

Beispiele aus dem Schulbuch, Kapitel I: S.9/3 a), S.14/1, S.21/9

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Dieser Anforderungsbereich umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten, Erklären und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.

Beispiele aus dem Schulbuch, Kapitel I: S. 9/3 b), S.15/8

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte verbunden mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei sollen Sie eigenverantwortlich geeignete Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung der Aufgabe auswählen, auf eine neue Problemstellung anwenden und das eigene Vorgehen reflektieren.

Die meisten Aufgaben in schriftlichen Leistungsnachweisen und der Abiturprüfung sind dem Anforderungsbereich II zuzuordnen. Einzelne Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und III sind ebenfalls enthalten. Oft umfassen Aufgaben jedoch mehrere notwendige Kompetenzen und verschiedene Anforderungsbereiche. Zum Beispiel, wenn es in einer textbasierten Aufgabe ein Problem im Anforderungsbereich II gelöst werden muss und dafür unter anderem ein einfaches Rechenverfahren wie das Lösen einer quadratischen Gleichung mit der Mitternachtsformel im Anforderungsbereich I durchgeführt werden muss.



1.3 Operatoren in Mathematik

Operatoren sind Schlüsselwörter, die in mathematischen Aufgabenstellungen bestimmte Anweisungen oder Erwartungen klar definieren. Sie sind besonders wichtig, da sie nicht nur den Lösungsweg, sondern auch die Art der Antwort beeinflussen. Verstehen und korrektes Anwenden dieser Operatoren hilft Ihnen, präzise zu arbeiten und die Aufgaben so zu lösen, wie es erwartet wird. Das vermeidet Missverständnisse und sorgt dafür, dass Ihre mathematischen Fähigkeiten richtig bewertet werden. Deswegen ist es wichtig, die Bedeutung der verschiedenen Operatoren zu kennen und genau zu wissen, was verlangt wird.

- **angeben, nennen:**
Objekte, Sachverhalte, Begriffe oder Daten ohne nähere Erläuterungen, Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen
- **anwenden:**
eine bekannte Methode auf eine Problemstellung beziehen
- **auswerten:**
Daten, Einzelergebnisse oder andere Elemente in einen Zusammenhang stellen, ggf. zu einer Gesamtaussage zusammenführen und Schlussfolgerungen ziehen
- **begründen:**
Sachverhalte unter Nutzung von Regeln und mathematischen Beziehungen auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen
- **berechnen:**
Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen; gelernte Algorithmen ausführen
- **beschreiben:**
Strukturen, Sachverhalte oder Verfahren in eigenen Worten unter Berücksichtigung der Fachsprache sprachlich angemessen wiedergeben
- **bestimmen, ermitteln:**
Zusammenhänge oder Lösungswege aufzeigen und unter Angabe von Zwischenschritten die Ergebnisse formulieren
- **beurteilen:**
zu Sachverhalten ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen
- **beweisen:**
Aussagen im mathematischen Sinne ausgehend von Voraussetzungen unter Verwendung bekannter Sätze und logischer Schlüsse verifizieren
- **entscheiden:**
sich bei Alternativen eindeutig und begründet auf eine Möglichkeit festlegen
- **erklären:**
Sachverhalte mit Hilfe eigener Kenntnisse verständlich und nachvollziehbar machen und begründet in Zusammenhänge einordnen
- **erläutern:**
einen Sachverhalt durch zusätzliche Informationen (unter Nutzung von Beispielen) veranschaulichen
- **interpretieren, deuten:**
Zusammenhänge bzw. Ergebnisse begründet auf gegebene Fragestellungen beziehen
- **prüfen, überprüfen:**
Fragestellungen, Sachverhalte, Probleme nach bestimmten fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten
- **skizzieren:**
die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes, eines Sachverhaltes oder einer Struktur graphisch (eventuell auch als Freihandskizze) darstellen
- **untersuchen:**
Eigenschaften von Objekten oder Beziehungen zwischen Objekten anhand fachlicher Kriterien nachweisen
- **vereinfachen:**
komplexe Terme oder Gleichungen auf eine Grundform oder eine leichter weiter zu verarbeitende Form bringen
- **vergleichen:**
Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede darstellen
- **zeichnen, graphisch darstellen:**
eine maßstäblich hinreichend exakte graphische Darstellung anfertigen
- **zeigen:**
Aussagen unter Nutzung von gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen



1.4 Tipps für den Umgang mit textlastigen Aufgaben in der Oberstufe

Beim Bearbeiten textlastiger Aufgaben besteht die Gefahr leicht den Überblick zu verlieren oder wichtige Informationen zu übersehen. Hier sind einige hilfreiche Tipps, um solche Aufgaben erfolgreich zu meistern:

- **Aufgabenstellung genau durchlesen!**
Achten Sie auf jedes Detail und versuchen Sie, den Kontext und die Aufgabestellung vollständig zu verstehen.
- **Wichtige Informationen markieren!**
Unterstreichen oder markieren Sie Schlüsselwörter, Zahlen und relevante Daten. Achten Sie besonders auf Maßeinheiten, Bedingungen und Einschränkungen.
- **Stichworte und Notizen machen!**
Notieren Sie sich wichtige Punkte und Zwischenüberlegungen am Rand oder auf einem separaten Blatt. Das hilft, den Gedankengang nachzuvollziehen und nichts zu vergessen.
- **Skizzen oder eine informative Figur erstellen!**
Veranschaulichen Sie Informationen mithilfe von eigenen Skizzen/ beschrifteten Figuren oder ergänzen Sie gegebene Darstellungen. Dies kann helfen, komplexe Zusammenhänge zu verdeutlichen und Lösungswege zu erkennen.
- **Mathematische Modelle oder Beziehungen verwenden!**
Versuchen Sie, den Text in mathematische Ausdrücke und Gleichungen zu übersetzen. Überlegen Sie, welche mathematischen Konzepte und Formeln angewendet werden können.
- **Reihenfolge der Lösungsschritte planen!**
Planen Sie die Reihenfolge, in der Sie die einzelnen Schritte bearbeiten möchten. Überlegen Sie, welche Informationen zuerst benötigt werden und welche später folgen.
- **Zwischenergebnisse überprüfen**
Überprüfen Sie regelmäßig Ihre Zwischenergebnisse auf Plausibilität. Frage Sie sich dabei, ob die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe sinnvoll sind.
- **Zusammenfassen und überprüfen!**
Fassen Sie am Ende Ihre Ergebnisse zusammen und überprüfen Sie, ob die gestellte Frage vollständig beantwortet wurde. Lesen Sie ggf. die Aufgabe erneut durch, um sicherzustellen, dass Sie nichts übersehen haben.
- **Ruhe bewahren und konzentriert arbeiten!**
Lassen Sie sich nicht von der Menge des Textes einschüchtern. Bleiben Sie ruhig und konzentrieren Sie sich auf jeden Schritt, um systematisch zur Lösung zu gelangen.



2 Beispiele für anspruchsvolle Aufgaben in der Jahrgangsstufe 11

2.1 Anspruchsvolle Aufgabe zum Kapitel Bedingte Wahrscheinlichkeit (Stochastik):

Eine Schwangerschaft bringt zahlreiche Veränderungen mit sich und stellt die werdenden Eltern vor viele Fragen. Die moderne Medizin bietet in der Pränataldiagnostik die Möglichkeit, Risiken und mögliche Gesundheitsstörungen frühzeitig zu erkennen – durch Untersuchungen, die für Mutter und Kind ungefährlich sind.

Der NIPT – nicht-invasiver Pränataltest – erlaubt es, aus einer Blutprobe der Mutter festzustellen, ob bestimmte Chromosomenstörungen wie zum Beispiel Trisomie 21 (Down-Syndrom) beim ungeborenen Kind vorliegen. Da lediglich eine Blutabnahme nötig ist, besteht im Gegensatz zu invasiven diagnostischen Maßnahmen wie einer Fruchtwasserpunktion oder Chorionzottenbiopsie kein Fehlgeburts- oder Verletzungsrisiko durch den Test.

Die Trisomie 21 ist dadurch gekennzeichnet, dass das Chromosom 21 dreifach vorhanden ist. Es handelt sich um die mit Abstand häufigste Chromosomenstörung des Menschen, sie liegt bei circa einer von 500 Schwangerschaften vor. Der NIPT erkennt die Trisomie 21 mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit. Aus klinischen Studien ist eine Entdeckungsrate von 99% anzunehmen. Von falsch-positiven Testergebnissen spricht man, wenn das Testergebnis eine Auffälligkeit anzeigt, die sich dann beim Kind selber nicht realisiert hat. Für die Trisomie 21 muss von einer falsch-positiv-Rate von etwa 0,1% ausgegangen werden. Das bedeutet, dass jeweils von etwa 1000 Frauen, die kein Kind mit einer Trisomie erwarten, eine Schwangere ein auffälliges Ergebnis bezüglich der Trisomie erhält.

Auf der Website eines Labor erfolgt eine humangenetische Beratung: „Bei einem unauffälligen Testergebnis ist das Vorliegen einer der getesteten Chromosomenstörungen (z.B. Trisomie 21) bei Ihrem ungeborenen Kind sehr unwahrscheinlich.“

- a) Beurteilen Sie, ob die Behauptung des Labors auf der Website richtig ist.
- b) Auf der Website wird keine Information gegeben über die Wahrscheinlichkeit des Vorliegens von Trisomie 21 bei einem positiven Testergebnis. Begründen Sie, warum das Unternehmen diese Entscheidung getroffen hat.

Quelle zu den medizinischen Informationen: <https://www.wisplinghoff.de/fuer-patienten/nipt-nicht-invasive-praenataltestung>

Erwartungshorizont:

Diese beiden Teilaufgaben sind auf einem hohen Anforderungsniveau. Die Textlastigkeit, die Wahl der Operatoren („Beurteilen“ und „Begründen“) und das Fehlen von Hilfestellungen zum strategischen Vorgehen machen diese Aufgaben sehr anspruchsvoll.

a)

Wichtig ist es zunächst, sich die Aufgabe genau durchzulesen und die wichtigsten Informationen in mathematische Formelsprache übersetzt aufzuschreiben. Grundsätzlich spielen zwei Ereignisse eine wichtige Rolle, diese sollte man als allererstes bestimmen und aufschreiben:



C: Das ungeborene Kind hat Trisomie 21.

T: Der Test (NIPT) zeigt ein positives Ergebnis an.

Jetzt kann man die bereits im Text markierten Werte und zugehörigen Beschreibungen aufschreiben, möglicherweise zunächst in Worten oder gleich mathematisch in Formelschreibweise:

$P(C) = \frac{1}{500} = 0,002$ „Die Wahrscheinlichkeit, dass die Chromosomenstörung vorliegt, beträgt 0,002.“

$P_C(T) = 0,99$ „Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ist, wenn die Chromosomenstörung vorliegt, beträgt 0,99. (Entdeckungsrate)“

$P_{\bar{C}}(T) = 0,001$ „Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ist, wenn die Chromosomenstörung nicht vorliegt, beträgt 0,001. (Falsch-Positiv-Rate)“

Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich dem Text entnehmen und sind gegeben. Es gilt also zunächst das aufzuschreiben, was gegeben ist.

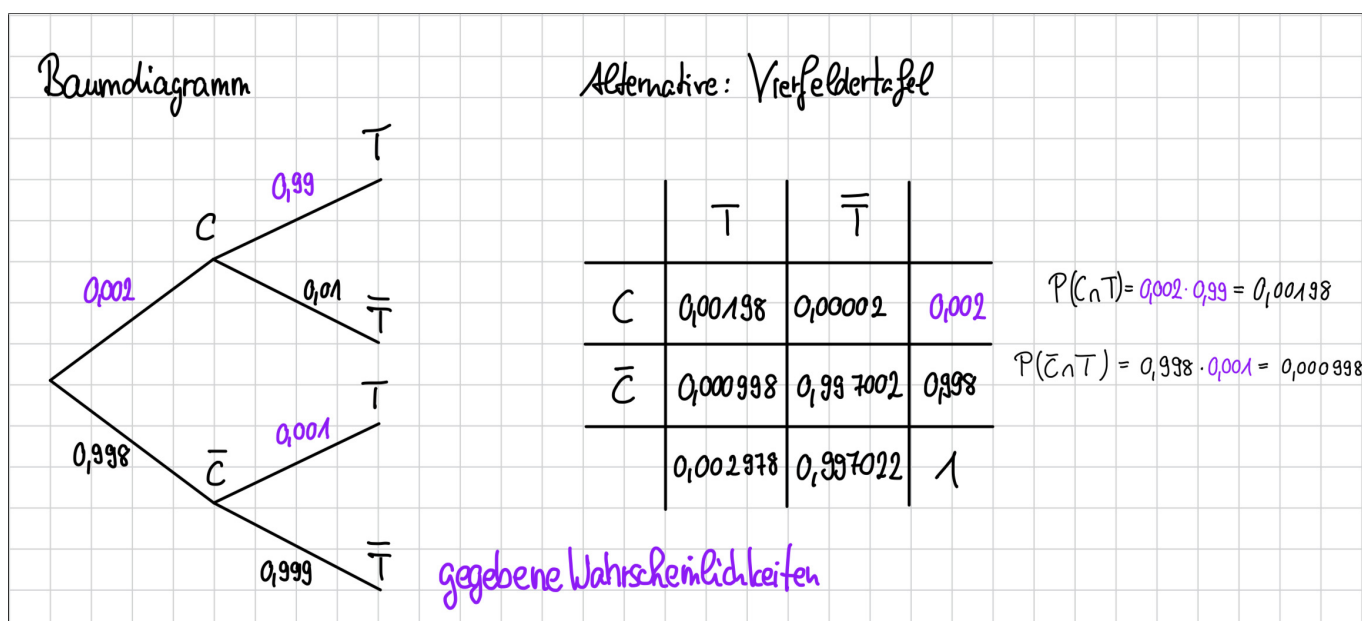
Als nächsten Schritt formuliert man die Wahrscheinlichkeit, die beurteilt werden soll und die gesucht ist.

$P_{\bar{T}}(C)$ „Wahrscheinlichkeit, dass eine Chromosomenstörung vorliegt, wenn der Test nicht positiv ist.“

Um diese Wahrscheinlichkeit im vorliegenden Kontext adäquat beurteilen zu können, muss man sie berechnen. Dafür kann man die Wahrscheinlichkeit zunächst als Quotient schreiben:

$$P_{\bar{T}}(C) = \frac{P(\bar{T} \cap C)}{P(\bar{T})}$$

Die Wahrscheinlichkeiten im Zähler und im Nenner sind nicht bekannt, sie lassen sich jedoch durch den Einsatz mathematischer Modelle wie einer Vierfeldertafel oder einem Baumdiagramm ermitteln.



Anmerkung: Es ist im Allgemeinen für diese Teilaufgabe nicht notwendig das Baumdiagramm oder



die Vierfeldertafel vollständig auszufüllen. Es reicht, die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, die für die Lösung benötigt werden.

Durch Einsetzen der im ermittelten Wahrscheinlichkeiten ergibt sich dann:

$$P_{\bar{T}}(C) = \frac{P(\bar{T} \cap C)}{P(\bar{T})} = \frac{0,002 \cdot 0,01}{0,998 \cdot 0,999 + 0,002 \cdot 0,01} = \frac{10}{498511} \approx 0,00002$$

Die Aussage des Labors auf ihrer Website ist richtig, da die Wahrscheinlichkeit, dass eine Chromosomenstörung vorliegt, wenn der Test nicht positiv ist, mit 0,00002 sehr gering ist.

b) Bei dieser Aufgabe geht es wie bei der Teilaufgabe a) um eine bedingte Wahrscheinlichkeit. Betrachtet wird die Wahrscheinlichkeit, dass Trisomie 21 vorliegt, wenn man weiß, dass das Testergebnis positiv ist. Zunächst gilt es wieder, diese bedingte Wahrscheinlichkeit als Quotient zu schreiben:

$$P_T(C) = \frac{P(T \cap C)}{P(T)}$$

Die Wahrscheinlichkeiten im Zähler und im Nenner lassen sich wieder aus dem Baumdiagramm oder der Vierfeldertafel aus Teilaufgabe a) bestimmen.

$$P_T(C) = \frac{P(T \cap C)}{P(T)} = \frac{0,00198}{0,00198 + 0,997002} = \frac{0,00198}{0,002978} \approx 0,66$$

Da die Wahrscheinlichkeit, dass Trisomie 21 vorliegt, wenn man weiß, dass das Testergebnis positiv ist, nur ca. 66% beträgt, hat sich das Labor entschlossen, diese Wahrscheinlichkeit nicht zu veröffentlichen. Patientinnen und die Öffentlichkeit könnten sonst glauben, dass der Test für den Untersuchungsgrund nicht geeignet ist.

Anmerkung: Tatsächlich ist das Hauptziel des Tests, das relativ sichere Ausschließen einer Chromosomenstörung. Um zu bestätigen, dass eine Chromosomenstörung vorliegt wenden die Mediziner dann eine für die Frau belastendere Untersuchungsmethode wie eine Fruchtwasserpunktion oder eine Biospie an.



Merke: Warum ist die Strategie „Veranschaulichen durch eine informative Figur oder Skizze“ so wichtig?

In der Mathematik spielt die Strategie „Veranschaulichen durch eine informative Figur oder Skizze“ eine entscheidende Rolle, um komplexe Probleme zu verstehen und zu lösen. Diese Methode hilft dabei, abstrakte Konzepte greifbarer zu machen und Zusammenhänge klarer zu erkennen. Hier sind einige wichtige Punkte, die diese Strategie ausmachen:

- **Visualisierung von Problemen:** Oftmals ist es einfacher, ein mathematisches Problem zu verstehen, wenn man es visuell darstellt. Eine Skizze oder eine Figur kann helfen, die wesentlichen Elemente eines Problems zu identifizieren und deren Beziehungen zueinander klar zu machen.
- **Schritt-für-Schritt-Darstellung:** Durch das Zeichnen einer Figur oder Skizze kann man den Lösungsprozess in einzelne Schritte unterteilen. Dies hilft dabei, systematisch vorzugehen und keine wichtigen Details zu übersehen.
- **Unterstützung beim Denken und Argumentieren:** Eine visuelle Darstellung kann das Denken strukturieren und das Argumentieren erleichtern. Man kann zum Beispiel durch eine Skizze zeigen, warum eine bestimmte geometrische Beziehung gilt oder wie ein Funktionsgraph aussieht.
- **Veranschaulichung von geometrischen Konzepten:** In der Geometrie ist das Zeichnen von Figuren unerlässlich. Durch das Skizzieren von Dreiecken, Kreisen, Vektoren oder anderen geometrischen Objekten kann man Eigenschaften und Beziehungen deutlich machen.
- **Klärung von Zusammenhängen in der Analysis:** Bei der Untersuchung von Funktionen, Ableitungen und Integralen können Grafiken und Diagramme helfen, das Verhalten von Funktionen zu verstehen und zu interpretieren. Ein Funktionsgraph zeigt beispielsweise direkt, wo eine Funktion ihre Hoch- oder Tiefpunkte hat oder wo sie monoton steigt oder fällt.
- **Erleichterung des Verständnisses in der Stochastik:** Wahrscheinlichkeiten und statistische Konzepte lassen sich durch Diagramme und Grafiken oft besser begreifen. Histogramme, Baumdiagramme oder Vierfeldertafeln veranschaulichen Daten und deren Verteilungen.

Siehe auch im Buch S. 187! Dort wird diese Strategie auch erklärt.



2.2 Anspruchsvolle Aufgabe zum Kapitel Anwendungen der Differentialrechnung (Analysis):

Aufgaben in der Oberstufe bestehen meist aus mehreren Teilaufgaben. Die ersten Teilaufgaben sind meist auf einfachem Anforderungsniveau. In Teilaufgaben auf erhöhtem Anforderungsniveau werden oft Erkenntnisse und Ergebnisse vorangegangener Teilaufgaben zur Lösung benötigt.

Beispiel für eine Aufgabe aus der Jahrgangsstufe 11, die aus drei Teilaufgaben besteht und sowohl Teilaufgaben auf einfachem als auch auf erhöhtem Anforderungsniveau enthält:

Ein Katamaran ist ein Boot oder Schiff, das aus zwei Rumpfeinheiten (Doppelrumpf) besteht, die durch Tragflächen oder eine Brücke miteinander verbunden sind. Im Gegensatz zu einem herkömmlichen Einrumpfboot bietet ein Katamaran aufgrund seiner breiteren Basis eine erhöhte Stabilität auf dem Wasser. Der Querschnitt einer neuen Fähre in Bauart eines Katamarans kann durch die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = 0,02x^4 - 0,4x^2$ ($D_f = \mathbb{R}$) modelliert werden. Dabei entspricht eine Einheit im Koordinatensystem 1 m. Die Funktion wird im Folgenden nur im Bereich betrachtet, in dem $f(x) \leq 0$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y -Achse ist.

b) Ermitteln Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f .

[Teilergebnis: Hochpunkt $H(0|0)$]

c) Im Hochpunkt des Graphen von f soll für Actionaufnahmen während der Fahrt und für Unterwasserbeobachtungen beim Ankern in einer klaren Lagune eine Kamera angebracht werden. Ermitteln Sie die Größe des Blickwinkels, die mit einem passenden Objektiv höchstens erreicht werden kann.

Erwartungshorizont:

a) Diese Teilaufgabe verlangt die Anwendung eines bekannten Verfahrens und ist dem Anforderungsniveau I zuzuordnen.

$$f(-x) = \underbrace{0,02(-x)^4 - 0,4(-x)^2}_{-x \text{ für } x \text{ einsetzen}} = 0,02x^4 - 0,4x^2 = f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y -Achse.

b) Diese Teilaufgabe verlangt die Anwendung eines bekannten mehrschrittigen Verfahrens. Die einzelnen Schritte sollte man immer wissen und ggf. auswendig lernen. Die Aufgabe ist dem Anforderungsniveau II zuzuordnen.

$$f(x) = 0,02x^4 - 0,4x^2$$

1. Schritt: Ableitung von f bilden

$$f'(x) = 0,08x^3 - 0,8x$$



2. Schritt: Nullstellen der Ableitung berechnen

$$f'(x) = 0 \quad \text{Ableitung mit 0 gleichsetzen!}$$

$$0,08x^3 - 0,8x = 0$$

$$x \cdot (0,08x^2 - 0,8) = 0 \quad \text{Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.}$$

$$x = 0 \text{ oder } 0,08x^2 - 0,8 = 0 \quad \text{Eine Nullstelle } x = 0 \text{ wurde schon gefunden.}$$

$$0,08x^2 - 0,8 = 0 \mid + 0,8 \quad \text{Quadratische Gleichung lösen!}$$

$$0,08x^2 = 0,8 \mid : 0,08$$

$$x^2 = 10$$

$$x = -\sqrt{10} \text{ oder } x = \sqrt{10} \quad \text{Die beiden anderen Nullstellen wurden berechnet.}$$

$$\Rightarrow \text{Nullstellen: } x_1 = -\sqrt{10}; x_2 = 0; x_3 = \sqrt{10}$$

3. Schritt: Monotonietabelle (Vorzeichentabelle) erstellen

x	$x < -\sqrt{10}$	$x = -\sqrt{10}$	$-\sqrt{10} < x < 0$	$x = 0$	$x < 0 < \sqrt{10}$	$x = \sqrt{10}$	$x > \sqrt{10}$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
G_f	fällt	Tiefpunkt	steigt	Hochpunkt	fällt	Tiefpunkt	steigt

Die Werte in der 2. Zeile erhält man durch Einsetzen einer passenden Zahl des zugehörigen Bereichs in $f'(x)$, Berechnung des Termwerts und Betrachtung dessen Vorzeichens. Für die 3. Zeile muss man dann den Satz über das Monotoniekriterium anwenden und die Art der Extrempunkte durch die Art des Vorzeichenwechsels folgern.

4. Schritt: Extrempunkte in Koordinatenschreibweise angeben

y -Koordinaten der drei Extrempunkte berechnen!

$$f(-\sqrt{10}) = -2 \Rightarrow T_1(-\sqrt{10} \mid -2)$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow H(0 \mid 0)$$

$$f(\sqrt{10}) = -2 \Rightarrow T_2(\sqrt{10} \mid -2)$$

c) Diese Teilaufgabe ist gänzlich auf einem hohen Anforderungsniveau (III) und verlangt den Einsatz verschiedener Strategien zum Problemlösen.

Bevor Sie die erste Strategie einsetzen, sollten Sie sich bewusst machen, was bei dieser Aufgabe gegeben und was gesucht ist.

Schreiben Sie auf, was gegeben und was gesucht ist.

Gegeben:

- $f(x) = 0,02x^4 - 0,4x^2$
- Hochpunkt $H(0|0)$ von G_f (Ergebnis von b))
- G_f ist achsensymmetrisch (Aufgabenstellung von a))

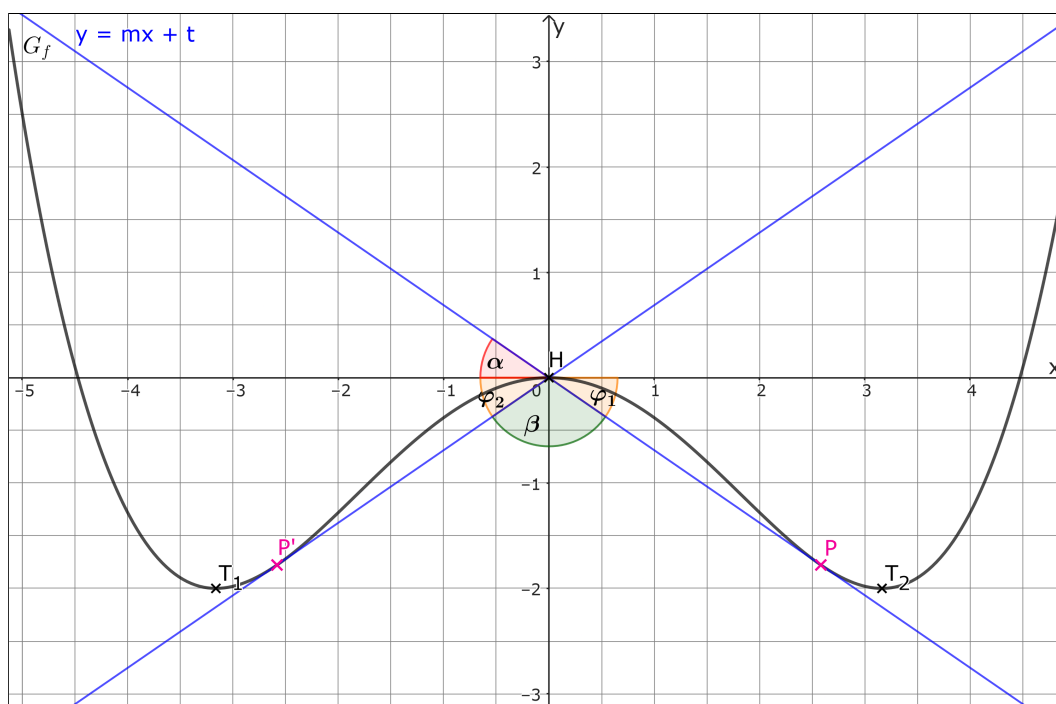
Gesucht: Größe eines Winkels mit Scheitel H

Um sich die Situation besser vorstellen zu können, kommt nun die **Strategie „Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze“** zum Einsatz. (Vgl. Schulbuch S. 197)

Skizzieren Sie den Graphen mithilfe der bisherigen Ergebnisse!

Mithilfe des skizzierten Graphen und dessen Eigenschaften ergeben sich zwei Geraden, die durch H verlaufen und den Graphen berühren. Diese beiden Geraden sind also Tangenten an G_f . Die beiden Geraden sind die beiden Schenkel des Winkels β .

Mithilfe einer Skizze kann man sich also die Situation anschaulich machen und bei dieser Aufgabe herausfinden, welcher Winkel genau gesucht ist.



Nun stellt sich jedoch die Frage, wie kann man die Größe diesen Winkel bestimmen kann.

Hier kommt Ihr Wissen zum Einsatz: Welche Winkel kann man bestimmen?

Aktivieren Sie Ihr Wissen zum Bestimmen von Winkelgrößen.

- Winkel im rechtwinkligen Dreieck lassen sich trigonometrisch berechnen.
- Winkel an Geradenkreuzungen lassen sich durch andere Winkel ermitteln (Nebenwinkel, Scheitelswinkel, Stufenwinkel, Wechselwinkel).
- Den spitzen Winkel, den eine Tangente mit der x -Achse bildet, kann man mit folgender Gleichung bestimmen: $\tan(\alpha) = |m|$.



Die beiden Winkel φ_1 und φ_2 sind wegen der Achsensymmetrie von G_f gleich groß und ergeben mit β zusammen 180° . Wenn Sie nun φ_1 kennen, dann kann man rechnen $\beta = 180^\circ - 2 \cdot \varphi_1$.

Um die Größe von φ_1 herauszufinden, muss man erkennen, dass α ein Scheitelwinkel von φ_1 ist und somit gleich groß sind. α ist ein spitzer Winkel, den eine Gerade mit der x -Achse hat und kann mit $\tan(\alpha) = |m|$ berechnet werden.

Es gilt somit: $\beta = 180^\circ - 2 \cdot \alpha$

Diese Überlegungen zeigen, dass **Grundwissen im Fach Mathematik sehr wichtig** ist!

Gesucht ist nun also die Steigung der Tangente mit der Gleichung $y = mx + t$, wobei $t = 0$ ist, da die Tangente durch den Punkt $H(0|0)$ geht. Es geht also um die Tangente mit der Gleichung $y = mx$.

Jetzt kommt eine weitere wichtige Strategie zum Einsatz, nämlich „**Aufstellen und Lösen einer Gleichung**“ (vgl. Schulbuch S. 186). Diese Strategie kommt zum Beispiel dann zum Einsatz, wenn für einen Zusammenhang oder ein mathematisches Objekt zwei Bedingungen erfüllt sind. Das ist insbesondere der Fall, wenn die x -Koordinate eines Berührungspunktes gesucht ist.

Hier gilt:

- Der **Berührungspunkt** P von Graph und Tangente **liegt auf dem Graph** und seine Koordinaten erfüllen die Gleichung $y = 0,02x^4 - 0,4x^2$.

- Der **Berührungspunkt** P von Graph und Tangente **liegt auf der Tangente** und seine Koordinaten erfüllen die Gleichung $y = mx$, wobei $m = f'(x) = 0,08x^3 - 0,8x$. Also: $y = (0,08x^3 - 0,8x) \cdot x$

Aufstellen und Lösen einer Gleichung

$$0,02x^4 - 0,4x^2 = (0,08x^3 - 0,8x) \cdot x$$

$$0,02x^4 - 0,4x^2 = 0,08x^4 - 0,8x^2$$

$$-0,06x^4 + 0,4x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (-0,4x^2 + 1,2) = 0 \quad x^2 \text{ ausklammern}$$

$$x^2 = 0 \text{ oder } -0,06x^2 + 0,4 = 0 \quad \text{Die Lösung } x = 0 \text{ ist nicht die, die wir suchen.}$$

$$-0,06x^2 + 0,4 = 0$$

$$-0,06x^2 = -0,4$$

$$x^2 = \frac{20}{3}$$

$$x = -\sqrt{\frac{20}{3}} \text{ oder } x = \sqrt{\frac{20}{3}}$$

Jetzt muss man die Lösung $x = \sqrt{\frac{20}{3}}$ in die Ableitung einsetzen, um die Steigung m an dieser Stelle zu bekommen.

$$f'\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right) = -\frac{8\sqrt{15}}{45} \quad \text{Damit kann man nun den Winkel } \alpha \text{ berechnen, da } \tan(\alpha) = \left| -\frac{8\sqrt{15}}{45} \right| = \frac{8\sqrt{15}}{45}.$$

Es ergibt sich $\alpha \approx 34,55^\circ$. Nun lässt sich β berechnen: $\beta = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 180^\circ - 2 \cdot 34,55^\circ = 110,90^\circ$.

Antwortsatz:: Der größtmögliche Blickwinkel, den die montierte Kamera haben kann, beträgt $110,90^\circ$.